

基本概念

首先在 $\mathbb{R}^3$ 中讨论向量.

定义 1 (内积). 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, 称

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的内积. 其中 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角. 在不引起混淆的前提下, 也可以把 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 记为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的内积.

定义 2 (外积). 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 称

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的外积.

定义 3 (混合积). 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, 称

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积.

性质 1. 设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^3$, 则

1. $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3$.
2. $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)$.
3. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

定义 4 (导数). 设向量 $\mathbf{a}$ 依赖于单参数 t , 则

$$\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)),$$

定义 $\mathbf{a}(t)$ 的导数

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt} \right).$$

即

$$\mathbf{a}'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t)).$$

性质 2. 以 t 为单参数的数值函数与 $\mathbf{a}$ 的数量积的导数以及向量内积、外积、混合积的导数, 都可由 Leibnitz 法则得到类似的形式.

注. 当向量值函数有多个参数时, 仍可类似作偏导数或微分运算, 也满足上述性质.

命题 1. $d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{r}$ 是常向量.

命题 2. $|\mathbf{r}(t)| = \text{const.} \iff \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \ (\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{r}'(t)).$

命题 3. 若 $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}$ 是常向量, 则

$$\mathbf{r}(t) // \mathbf{c} \iff \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}.$$

命题 4. 若 $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{n}$ 是常向量, 则

$$\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{n} \iff (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0.$$

证明. “ $\Rightarrow$ ”: 由 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{n} = 0$, 有

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{n})' = 0,$$

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n})' = 0.$$

于是 $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$ 共面, 有 $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0$.

“ $\Leftarrow$ ”: 令 $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)|}$, 则 $|\mathbf{n}(t)| = 1$. 令 $\lambda = |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)|$, 则

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \lambda \mathbf{n},$$

两边求导, 有

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \lambda' \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n}'$$

由 $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0$, 于是 $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$ 共面, 又 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' // \mathbf{n}(t)$, 于是 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' // \mathbf{n}(t)$.

设 $\mu \mathbf{n}(t) = \lambda' \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n}'$, 两边与 $\mathbf{n}'$ 作内积, 由于 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$, 于是

$$\lambda |\mathbf{n}'|^2 = 0,$$

而 $\lambda \neq 0$, 有 $\mathbf{n}' = \mathbf{0}$, 于是 $\mathbf{n}$ 是常向量且满足 $\mathbf{r}(t) \perp \mathbf{n}$. □

定义 5 (标架). 在 $\mathbb{R}^3$ 中取定一点 O 以及三个线性无关的向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, 称 $\{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个标架.

定义 6 (标架定向). 设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标架, 若 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$, 则称该标架为右手标架. 若 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) < 0$, 则称该标架为左手标架.

定义 7 (正交标架). 设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标架, 若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 相互正交, 则称该标架为正交标架.

定义 8 (自然标架). 三维欧氏空间给出一个标架 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, 称为**自然标架**.

定义 9 (坐标). 设 $P \in \mathbb{R}^3$ 满足

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{v}_i,$$

则称 (x^1, x^2, x^3) 为 P 在标架 $\{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 下的**坐标**.

注. 一般把坐标的指标写在上面, 向量的指标写在下面.

设 $P \in \mathbb{R}^3$, 在正交标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的坐标为 (x^1, x^2, x^3) , 在另一正交标架 $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 下的坐标为 (y^1, y^2, y^3) , 采用 Einstein 求和约定, 设 $\overrightarrow{OO'} = c^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_i = t^j_i \mathbf{e}_j$, 则

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

即

$$c^i \mathbf{e}_i + y^j \mathbf{e}'_j = x^i \mathbf{e}_i.$$

代入并更换指标, 有

$$c^i \mathbf{e}_i + y^j t^i_j \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$

有

$$x^i = c^i + y^j t^i_j = c^i + \sum_{j=1}^3 t^i_j y^j.$$

记矩阵 $\mathbf{T} = (t^j_i)$, 则

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

且 $\mathbf{T}$ 是正交矩阵, $\det \mathbf{T} = \pm 1$. 当 $\det \mathbf{T} = 1$ 时, 称它们**定向相同**, 否则称**定向相反**.

定义 10 (合同变换). 设 $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是双射, 称为 $\mathbb{R}^3$ 上的变换. 若 $\mathcal{T}$ 保持距离, 即对任意 $P, Q \in \mathbb{R}^3$, $d(P, Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q))$, 则称 $\mathcal{T}$ 为**合同变换**.

定理 1. 设 $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是合同变换, 则存在 $\mathbf{T} \in O(3)$ 及 $P \in \mathbb{R}^3$, 对任意 $x \in \mathbb{R}^3$, 有

$$\mathcal{T}(x) = \mathbf{T}x + P$$

证明. 通过平移变换, 可以使原点重合, 于是不妨设 $\mathcal{T}(O) = O$.

对任意 $t \in (0, 1)$, $d(O, \mathcal{T}(x)) = d(O, x)$, $d(O, \mathcal{T}(tx)) = d(O, tx)$, $d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(tx)) = d(x, tx)$, 而

$$d(O, tx) + d(tx, x) = d(O, x),$$

于是

$$d(O, \mathcal{T}(tx)) + d(\mathcal{T}(tx), \mathcal{T}(x)) = d(O, \mathcal{T}(x)).$$

故 $\mathcal{T}(tx)$ 在 O 与 $\mathcal{T}(x)$ 的连线上. 设 $\mathcal{T}(tx) = s\mathcal{T}(x)$, 则

$$td(O, x) = d(O, tx) = d(O, \mathcal{T}(tx)) = d(O, s\mathcal{T}(x)) = sd(O, \mathcal{T}(x)),$$

而 $d(O, x) = d(O, \mathcal{T}(x))$, 于是 $t = s$.

于是当 $t \in (0, 1)$ 时, 有 $\mathcal{T}(tx) = t\mathcal{T}(x)$.

对任意 $t \in (1, +\infty)$, 有 $1/t \in (0, 1)$, 于是

$$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\left(t \cdot \frac{1}{t}x\right) = \frac{1}{t}\mathcal{T}(tx),$$

有 $\mathcal{T}(tx) = t\mathcal{T}(x)$.

下证 $\mathcal{T}$ 是保内积的.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y) \rangle &= \frac{1}{2} (|\mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)|^2 - |\mathcal{T}(x)|^2 - |\mathcal{T}(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2} (|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)|^2 - |\mathcal{T}(x)|^2 - |\mathcal{T}(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2} (|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

于是 $\mathcal{T}$ 保内积. 而对任意 $x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} &|\mathcal{T}(x + y) - \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)|^2 \\ &= \langle \mathcal{T}(x + y) - \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y), \mathcal{T}(x + y) - \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y) \rangle \\ &= \langle x + y - x - y, x + y - x - y \rangle \\ &= |x + y - x - y|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是 $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$.

对任意 $t < 0$, 有

$$0 = \mathcal{T}(tx + (-tx)) = \mathcal{T}(tx) - t\mathcal{T}(x),$$

于是 $\mathcal{T}(tx) = t\mathcal{T}(x)$.

于是 $\mathcal{T}$ 是保内积的线性变换, 故 $\mathbf{T} \in O(3)$. □

推论 1. $\mathbb{R}^3$ 上全体标架与合同变换一一对应.